

07 octobre 2025

## Corrigé 4

**Exercice 1.** Soient  $K$  un corps et  $K[t]_{\leq d}$  l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus  $d$  à coefficients dans  $K$ . Soit  $\lambda \in K$  fixé. Soient  $U = K[t]_{\leq 2}$  et  $V = \{b_1t + \lambda b_3t^3 + \lambda^2 b_4t^4 \mid b_1, b_3, b_4 \in K\}$ . Montrer que  $U$  et  $V$  sont des sous-espaces vectoriels de  $K[t]_{\leq 4}$ .

**Solution 1.** On utilise le critère des sous-espaces. Les ensembles  $U$  et  $V$  ne sont pas vides car  $0 \in U$  et  $0 \in V$ . Pour  $f, g \in U = K[t]_{\leq 2}$  et  $\mu \in K$ , alors  $f$  et  $g$  sont deux polynômes de degré au plus 2, il en est de même pour leur somme  $f + g$  et  $\mu \cdot f$ . Donc  $U$  est un sous-espace vectoriel de  $K[t]_{\leq 4}$ .

Soient  $f, g \in V$  et  $\mu \in K$ . Alors il existe  $b_1, b_3, b_4, b'_1, b'_3, b'_4 \in K$  tels que  $f = b_1t + \lambda b_3t^3 + \lambda^2 b_4t^4$  et  $g = b'_1t + \lambda b'_3t^3 + \lambda^2 b'_4t^4$ . Donc on a  $\mu f + g = (\mu b_1 + b'_1)t + \lambda(\mu b_3 + b'_3)t^3 + \lambda^2(\mu b_4 + b'_4)t^4 \in V$ . On a montré que  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $K[t]_{\leq 4}$ .

**Exercice 2.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel avec sous-espaces vectoriels  $W_1, W_2 \subset V$ .

- Démontrer que  $W_1 + W_2$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .
- Démontrer que  $W_1 \cap W_2$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .
- Donner un exemple dans  $V = \mathbb{R}^2$  de sous-espaces vectoriels  $W_1$  et  $W_2$  tels que  $W_1 \cup W_2$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $V$ .
- Donner un exemple dans  $V = \mathbb{R}^3$  de trois sous-espaces vectoriels  $W_1, W_2, W_3$  tels que le sous-espace  $W_1 + W_2 + W_3$  n'est pas la somme directe des sous-espaces  $W_1, W_2, W_3$ .

**Solution 2.**

- Comme  $W_i$  est non vide pour  $i = 1, 2$ ,  $W_1 + W_2$  est non vide. Soient  $x, y \in W_1 + W_2$  et  $\alpha, \beta \in K$ . Donc il existe  $w_1, v_1 \in W_1$  et  $w_2, v_2 \in W_2$  tels que  $x = w_1 + w_2$  et  $y = v_1 + v_2$ . Donc  $\alpha x + \beta y = \alpha(w_1 + w_2) + \beta(v_1 + v_2) = \alpha w_1 + \alpha w_2 + \beta v_1 + \beta v_2 = (\alpha w_1 + \beta v_1) + (\alpha w_2 + \beta v_2)$ . Comme  $W_1$  et  $W_2$  sont des sous-espaces vectoriels on a que  $\alpha w_1 + \beta v_1 \in W_1$  et  $\alpha w_2 + \beta v_2 \in W_2$ . Donc  $\alpha x + \beta y \in W_1 + W_2$  et on conclut que  $W_1 + W_2$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .
- L'ensemble  $W_1 \cap W_2$  contient le vecteur nul  $0$ , et donc n'est pas vide. Soient  $x, y \in W_1 \cap W_2$  et  $\alpha, \beta \in K$ . Alors  $x, y \in W_1$ , et le fait que  $W_1$  soit un sous-espace vectoriel implique que  $\alpha x + \beta y \in W_1$ . De même pour  $W_2$ . Donc  $\alpha x + \beta y \in W_1 \cap W_2$ , d'où  $W_1 \cap W_2$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .
- Prenons  $W_1 = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$  et  $W_2 = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ . Alors  $(1, 0), (0, 1) \in W_1 \cup W_2$ , mais  $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$  n'appartient ni à  $W_1$  ni à  $W_2$ . Donc  $W_1 \cup W_2$  n'est pas stable par l'addition et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de  $V$ .
- Prenons  $W_1 = \{(a, a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ,  $W_2 = \{(0, b, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ , et  $W_3 = \text{Vect}((2, 3, 1))$ . Alors  $W_3 \subset W_1 + W_2$  et par conséquent  $W_1 + W_2 + W_3$  n'est pas la somme directe des 3 sous-espaces.

**Exercice 3.** Trouver les valeurs de  $a \in \mathbb{C}$  telles que la partie suivante  $X$  de  $M_2(\mathbb{C})$  soit libre:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ai & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pour  $a = i$ , exprimer la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & i-2 \end{pmatrix}$  comme combinaison linéaire d'éléments de  $X$ .

**Solution 3.** Cette partie  $X$  de  $M_2(\mathbb{C})$  est libre si et seulement si pour  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ ,

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ai & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (*)$$

implique  $\lambda = \mu = \nu = 0$ . L'égalité (\*) équivaut à dire que

$$\begin{cases} \lambda a^2 + \mu = 0 \\ \mu + \nu ai = 0 \\ \lambda i + \mu(a-1) + \nu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda a^2 \\ \nu = \lambda(-i + a^2(a-1)) \\ \lambda a(a-1)(a^2+i) = 0 \end{cases}$$

Donc si  $a \notin \{0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\}$ ,  $\lambda = 0$  et par conséquent,  $\mu = \nu = 0$ . Cette famille est donc libre.

Si  $a \in \{0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\}$ , alors pour tout triple  $(\lambda, \mu, \nu)$  avec  $\lambda \neq 0$ ,  $\mu = -\lambda a^2$  et  $\nu = \lambda(-i + a^2(a-1))$ , l'égalité (\*) est vérifiée. Cette famille est donc liée.

Pour  $a = i$ ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & i-2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ 0 & i \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ai & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  fixé. Dans  $\mathbb{R}[t]$ , on considère la famille de polynômes

$$\mathcal{F} = \{(\lambda^2 - 1)t^3 + t^2, \lambda t^3 + t - \lambda, (1 - \lambda)t^3 + t + 1, \lambda\}.$$

Pour quelles valeurs de  $\lambda$  cette famille est-elle libre dans  $\mathbb{R}[t]$ ?

**Solution 4.** Soit

$$a((\lambda^2 - 1)t^3 + t^2) + b(\lambda t^3 + t - \lambda) + c((1 - \lambda)t^3 + t + 1) + d\lambda = 0$$

une combinaison linéaire à coefficients réels. En écrivant que le coefficient de chaque puissance de  $t$  doit être nul, on obtient le système

$$\begin{cases} a(\lambda^2 - 1) + b\lambda + c(1 - \lambda) & = 0 \\ a & = 0 \\ b + c & = 0 \\ -b\lambda + c + d\lambda & = 0 \end{cases} \quad (1)$$

On voit donc que  $a = 0$  et que  $b = -c$ , et on remplace ces relations dans les équations restantes pour obtenir:

$$\begin{cases} b(2\lambda - 1) & = 0 \\ -b\lambda - b + d\lambda & = 0 \end{cases}$$

Si  $\lambda \neq \frac{1}{2}$  alors  $b = 0$ , donc  $c = 0$  et si en plus  $\lambda \neq 0$ , alors  $d = 0$ . Par conséquent, si  $\lambda \notin \{0; \frac{1}{2}\}$  la famille  $\mathcal{F}$  est libre.

Si  $\lambda = 0$ , la famille  $\mathcal{F}$  est liée, car elle contient le vecteur nul.

Si  $\lambda = \frac{1}{2}$ , alors  $\forall b \in \mathbb{R}$  le système (1) admet comme solution  $(0; b; -b; 3b)$ , donc  $\mathcal{F}$  est une famille liée.

**Exercice 5.** Soient  $v = (a, b)$  et  $w = (c, d)$  des vecteurs dans  $K^2$ . Montrer que  $\{v, w\}$  est un ensemble de vecteurs linéairement dépendants si et seulement si  $ad - bc = 0$ .

**Solution 5.** Supposons que  $ad - bc = 0$ . On montre que les vecteurs  $v$  et  $w$  sont linéairement dépendants. Si  $a = 0$ , on a  $bc = 0$ . Soit  $b = 0$ , alors  $v = (0, 0) = 0w$  et les vecteurs sont dépendants, soit  $c = 0$  et alors  $v = (0, b)$  et  $w = (0, d)$  et l'un est un multiple de l'autre, donc les vecteurs sont linéairement dépendants. On suppose maintenant que  $a \neq 0$ , et de suite  $d = \frac{bc}{a}$ . On a  $w = (c, d) = (c, \frac{bc}{a}) = \frac{c}{a}(a, b) = \frac{c}{a}v$ , ce qui montre que  $v$  et  $w$  sont linéairement dépendants.

Maintenant on suppose que  $v$  et  $w$  sont linéairement dépendants. Par un résultat du cours on sait que soit  $v \in \text{Vect}(w)$ , soit  $w \in \text{Vect}(v)$ . Si  $w \in \text{Vect}(v)$ , on a que  $w = \alpha v$  pour un  $\alpha \in K$ , et donc  $ad - bc = a(\alpha b) - b(\alpha a) = 0$ . Le cas où  $w \in \text{Vect}(v)$  est pareil.

**Remarque** Nous avons montré qu'il existe  $\lambda, \mu \in K$ , avec  $\lambda, \mu \neq 0$  et tels que  $\lambda v + \mu w = 0$  si et seulement si  $ad - bc = 0$ . Ceci montre que le système d'équations

$$\lambda a + \mu c = 0$$

$$\lambda b + \mu d = 0$$

possède une solution différente de la solution  $\lambda = 0$  et  $\mu = 0$  si et seulement si  $ad - bc = 0$ . On verra la généralisation de ce critère dans le chapitre sur le déterminant, plus tard dans le semestre.

**Exercice 6.** Pour chaque sous-espace vectoriel  $W$  de l'espace vectoriel  $V$  donné, trouver une famille génératrice de cardinalité 3, et une autre de cardinalité 4.

(a)  $V = \mathbb{F}_5^5$  (sur  $\mathbb{F}_5$ ),  $W = \{(a, b, c, d, e) \in V \mid a + b = c - d, a + 2c = 0, b - c = 2c - d\}$

(b)  $V = \mathbb{R}[t]$  (sur  $\mathbb{R}$ ),  $W = \{f \in V \mid \deg(f) \leq 2, f(1) = 0 = f(-1)\}$

**Solution 6.**

(a) Chaque vecteur dans  $W$  s'écrit comme  $(3c, 3c - d, c, d, e)$ . De plus, pour tout  $c, d, e \in \mathbb{F}_5$ , on a que le vecteur  $(3c, 3c - d, c, d, e) \in W$  car toutes les conditions sont vérifiées. On a donc que

$$(a, b, c, d, e) \in W \iff (a, b, c, d, e) = (3c, 3c - d, c, d, e) = c(3, 3, 1, 0, 0) + d(0, -1, 0, 1, 0) + e(0, 0, 0, 0, 1).$$

On prend comme famille génératrice

$$\{(3, 3, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$$

et une autre  $\{(3, 3, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1), (0, -1, 0, 1, 1)\}$ .

(b) Soit  $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in W$ . On a  $f(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 0 = f(-1) = a_0 - a_1 + a_2$ . On déduit que  $a_0 = -a_2$  et  $a_1 = 0$ . De plus si  $a_0 = -a_2$  et  $a_1 = 0$ , on a  $f(1) = 0 = f(-1)$ . Donc chaque  $f \in W$  s'écrit comme  $f(t) = a_0 - a_0 t^2 = a_0(1 - t^2)$  et le polynôme  $g(t) = 1 - t^2$  est une famille génératrice de  $W$ . Donc on peut prendre les familles génératrices suivantes  $\{1 - t^2, 2 - 2t^2, \sqrt{2}(1 - t^2)\}$  et  $\{1 - t^2, 2 - 2t^2, \sqrt{2}(1 - t^2), 0\}$ .

**Exercice 7.** Soient  $p, q \in \mathbb{C}$  et considérons les vecteurs  $u = (p, 0, p - q)$ ,  $v = (0, p, q)$  et  $w = (1, p, p) \in \mathbb{C}^3$ . Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

(a) Les vecteurs  $u, v, w$  sont linéairement dépendants si et seulement si  $p = 0$ .

- (b) Les vecteurs  $u, v, w$  sont linéairement dépendants si et seulement si  $p = q$ .
- (c) Les vecteurs  $u, v, w$  sont linéairement indépendants si  $p \notin \{0, 1\}$  et  $q = ip$ .

**Solution 7.** La troisième réponse est la bonne. Si  $p = 0$ , alors  $u = -v$ , donc les vecteurs sont linéairement dépendants. Si  $p = 1$ , alors  $w = u + v$ , et les vecteurs sont linéairement dépendants. Si  $p = q$ , alors  $u + pv - pw = 0$ , et les vecteurs sont linéairement dépendants. Pour prouver que les vecteurs  $u, v, w$  sont linéairement indépendants si  $p \notin \{0, 1\}$  et  $q = ip$ , montrons que  $\text{Vect}(u, v, w) = \mathbb{C}^3$ . Si  $p \notin \{0, 1\}$  et  $q = ip$ , alors  $w - u - v = (1 - p, 0, 0)$ . Comme  $p \neq 1$ , on a  $1 - p \neq 0$ , et donc  $(1, 0, 0) \in \text{Vect}((u, v, w))$ . On a donc aussi  $w - (1, 0, 0) = (0, p, p) \in \text{Vect}((u, v, w))$ . Cela implique que  $(0, p, p) - v = (0, 0, p - q) \in \text{Vect}((u, v, w))$ . Comme  $p \neq q$ , cela implique  $(0, 0, 1) \in \text{Vect}((u, v, w))$ . Finalement, on a  $v - q(0, 0, 1) = (0, p, 0) \in \text{Vect}((u, v, w))$ , et comme  $p \neq 0$ ,  $(0, 1, 0) \in \text{Vect}((u, v, w))$ .

---

**Exercice 8.** On considère le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , montrer que la famille  $\{1, \sin, \sin^2, \sin^3\}$  est libre.

**Solution 8.** Soit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tels que  $a + b \sin + c \sin^2 + d \sin^3 = 0$ . C'est une égalité de fonctions, ce qui signifie que  $a + b \sin(x) + c \sin^2(x) + d \sin^3(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On choisit successivement  $x = 0$ ,  $x = \pi/2$ ,  $x = -\pi/2$ ,  $x = \pi/6$ , et on trouve  $a = 0$ ,  $a + b + c + d = 0$ ,  $a - b + c - d = 0$ ,  $a + b/2 + c/4 + d/8 = 0$ . Il en résulte facilement que  $a = b = c = d = 0$ . Cela démontre l'indépendance linéaire de  $1, \sin, \sin^2, \sin^3$ .

---

**Exercice 9.** Soit  $K$  un corps et  $V$  un  $K$ -espace vectoriel. Soient  $v_1, v_2, v_3$  trois éléments de  $V$ . Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes?

- (a) Si la famille  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est libre, alors  $\{v_1, v_3\}$  est libre.
- (b) Si la famille  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est libre, alors elle est aussi génératrice.
- (c) Les éléments  $v_1$  et  $v_2$  sont linéairement dépendants si et seulement si  $v_1$  est un multiple de  $v_2$ .
- (d) Si  $K = \mathbb{F}_5$ , alors  $\text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Vect}(v_1 + 3v_2, 2v_1 + v_2)$ .
- (e)  $\text{Vect}(v_1 + 2v_2, v_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ .
- (f) Si la famille  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est libre, alors  $\{v_1, v_2, v_3, 0\}$  est libre.
- (g) Si la famille  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est génératrice, alors  $\{v_1 + v_3, v_2 + v_3, v_1 + 2v_3\}$  l'est aussi.
- (h) Si  $K = \mathbb{F}_7$  et si  $v_1$  et  $v_2$  sont linéairement indépendants, alors

$$\text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Vect}(2v_1 + 3v_2, 6v_1 + 2v_2).$$

**Solution 9.**

- (a) Oui, c'est vrai en appliquant la définition.
- (b) Non. Par exemple, si  $V$  est de dimension 4, alors toute base est de cardinal 4 et cette famille de cardinal 3 n'est donc pas une base. Par conséquent elle n'est pas génératrice.
- (c) Non. La condition est suffisante, mais pas nécessaire. Par exemple, si  $v_1 \neq 0$  et  $v_2 = 0$ , alors ils sont liés, puisque  $0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 0$ , mais  $v_1$  n'est jamais un multiple de  $v_2$ , car tout multiple de  $v_2$  est l'élément nul.

- (d) Non. Supposons  $v_1$  et  $v_2$  linéairement indépendants, si bien que  $\text{Vect}(v_1, v_2)$  est de dimension 2. Notons que  $2(v_1 + 3v_2) = 2v_1 + 6v_2 = 2v_1 + v_2$ , puisque  $6 = 1$  dans  $\mathbb{F}_5$ . Donc  $\text{Vect}(v_1 + 3v_2, 2v_1 + v_2) = \text{Vect}(v_1 + 3v_2)$ , qui est engendré par un seul élément. C'est donc un sous-espace propre de  $\text{Vect}(v_1, v_2)$ , vu que  $\text{Vect}(v_1, v_2)$  est de dimension 2.
- (e) Oui. On montre l'égalité en montrant la double inclusion. Comme  $v_1 + 2v_2 \in \text{Vect}(v_1, v_2)$  et  $v_2 \in \text{Vect}(v_1, v_2)$ , toute combinaison linéaire de  $v_1 + 2v_2$  et  $v_2$  est encore dans  $\text{Vect}(v_1, v_2)$  et on obtient donc  $\text{Vect}(v_1 + 2v_2, v_2) \subseteq \text{Vect}(v_1, v_2)$ . Réciproquement,  $v_1 = (v_1 + 2v_2) - 2v_2$  est une combinaison linéaire de  $v_1 + 2v_2$  et  $v_2$ , donc  $v_1 \in \text{Vect}(v_1 + 2v_2, v_2)$ ; et comme  $v_2 \in \text{Vect}(v_1 + 2v_2, v_2)$ , toute combinaison linéaire de  $v_1$  et  $v_2$  est encore dans  $\text{Vect}(v_1 + 2v_2, v_2)$ , si bien que  $\text{Vect}(v_1, v_2) \subseteq \text{Vect}(v_1 + 2v_2, v_2)$ . Finalement on obtient l'égalité des sous-espaces vectoriels  $\text{Vect}(v_1 + 2v_2, v_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ .
- (f) Non, car  $\forall 0 \neq a \in K$ , on a  $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + a \cdot 0 = 0$ , donc une combinaison linéaire non triviale des vecteurs  $v_1, v_2, v_3$ , et  $0$  qui s'annule.
- (g) Affirmation correcte. Il suffit de vérifier que  $v_1, v_2, v_3$  appartiennent à  $\text{Vect}(v_1 + v_3, v_2 + v_3, v_1 + 2v_3)$  car alors les combinaisons linéaires de  $v_1, v_2, v_3$  aussi, si bien que

$$V = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3) \subseteq \text{Vect}(v_1 + v_3, v_2 + v_3, v_1 + 2v_3) \subseteq V,$$

d'où des égalités. Or on a clairement  $v_3 = (v_1 + 2v_3) - (v_1 + v_3)$  et de plus

$$\begin{aligned} v_1 &= (v_1 + v_3) - v_3 = (v_1 + v_3) - (v_1 + 2v_3) + (v_1 + v_3), \\ v_2 &= (v_2 + v_3) - v_3 = (v_2 + v_3) - (v_1 + 2v_3) + (v_1 + v_3). \end{aligned}$$

- (h) Non. Evidemment  $\text{Vect}(2v_1 + 3v_2, 6v_1 + 2v_2) \subset \text{Vect}(v_1, v_2)$ . D'autre part,

$$3(2v_1 + 3v_2) = 6v_1 + 9v_2 = 6v_1 + 2v_2$$

sur  $\mathbb{F}_7$ , donc l'espace  $\text{Vect}(2v_1 + 3v_2, 6v_1 + 2v_2)$  est de dimension 1. Il ne peut donc pas être égal à  $\text{Vect}(v_1, v_2)$ , qui est de dimension 2, car  $v_1$  et  $v_2$  sont linéairement indépendants par hypothèse.

### Exercice 10.

- (a) Dans le  $\mathbb{F}_3$ -espace vectoriel  $\mathbb{M}_{2 \times 3}(\mathbb{F}_3)$ , montrer que

$$\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

- (b) Soit  $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ . Déterminer si le sous-espace vectoriel  $W = \text{Vect}(t^2 - 2, t^2 + t, 2t^2 + t + 2)$  est égal à  $V$  et pareil pour  $U = \text{Vect}(t^2 - 2, t^2 + t, 2t^2 + t - 2)$ .
- (c) Vrai ou faux :  $\text{Vect}(t^k \mid k \geq 1) = K[t]$ .

### Solution 10.

- (a) Posons  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , et  $E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , et  $U_1 = \text{Vect}(A, B, C)$ ,  $U_2 = \text{Vect}(D, E)$ . On montre les deux inclusions  $U_1 \subset U_2$  et  $U_2 \subset U_1$ . Pour la première inclusion on note que  $A = 2D + 2E$ ,  $B = 2D$  et  $C = D + 2E$ . Donc toute combinaison linéaire de  $A, B$  et  $C$  appartient à  $U_2$  et nous avons  $U_1 \subset U_2$ . Pour l'inclusion  $U_2 \subset U_1$  on note que  $D = 2B$  et  $E = 2A + B$  et on conclut comme avant. Les deux inclusions impliquent l'égalité  $U_1 = U_2$ .

- (b) On note que  $t^2 - 2 + t^2 + t - (2t^2 + t + 2) = -4 \in W$  et ainsi  $1 \in W$ . On déduit ensuite que  $t^2 - 2 + 2 = t^2 \in W$  et enfin que  $t = t^2 + t - t^2 \in W$ . Cela suffit pour voir que tout polynôme  $at^2 + bt + c \in W$ . On a  $W = V$ .

Pour  $U$ , par contre, on montre que le polynôme  $t$  n'appartient pas à  $U$ ; on suppose le contraire et donc il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $a(t^2 - 2) + b(t^2 + t) + c(2t^2 + t - 2) = t$ . De cette égalité on déduit que  $(a + b + 2c)t^2 + (b + c)t + (-2a - 2c) = t$  et de suite que  $a + b + 2c = 0$ ,  $b + c = 1$  et  $-2a - 2c = 0$ . De la troisième et première équations on a que  $b + c = 0$  ce qui contredit la deuxième égalité. Donc  $t \notin U$  et  $U \neq \mathbb{R}[t]$ .

- (c) Faux, car les polynômes constants n'appartiennent pas à  $\text{Vect}(t^k \mid k \geq 1)$ .